

Esercizio 1 Dire se esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che

$$\sum_{n=N}^{+\infty} 3^n < +\infty.$$

Esercizio 2 Determinare il carattere delle seguenti serie

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{4^n + n^2} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{3n+8} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(n^2+n)^n} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\frac{1}{n})}{n} \\ & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{2^n} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^{n^2}} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sin^2 \frac{1}{n} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n} \\ & \sum_{n=1}^{\infty} (n^{1/n} - 1)^n \quad \sum_{n=1}^{\infty} (1 - \cos \frac{1}{n}) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)^3} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(2n)!} \\ & \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^n} \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^{\log n}}, \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{\log n} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^2} \end{aligned}$$

Esercizio 3 Studiare la convergenza assoluta delle seguenti serie

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \cos(n^2) \sin\left(\frac{1}{2^n}\right), \quad \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\log n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\frac{\pi}{2})}{n}. \\ & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 + (-1)^n}{3^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{n^4+1} \end{aligned}$$

Tali serie convergono semplicemente?

Esercizio 4 Dire per quali $x \in \mathbb{R}$ sono convergenti le serie seguenti:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{x^n+2} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^n - n!}{(na^2)^n + e^n} \\ & \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{[1 + (-1)^n x]^n}{2^n \sqrt{n^3+1}} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2} \\ & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n^2+1} \quad \sum_{n=1}^{\infty} nx^n \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)x^n}{n!} \end{aligned}$$

Esercizio 5 Siano $\sum_n a_n$ e $\sum_n b_n$ convergenti, con $a_n \geq 0, b_n \geq 0$ per ogni n . Dimostrare che

$$\sum_n a_n b_n < +\infty.$$

Esercizio 6 Trovare due serie $\sum_n a_n$ e $\sum_n b_n$ convergenti, con $a_n \geq 0, b_n \geq 0$ per ogni n , e tali che

$$\sum_n a_n b_n < \left(\sum_n a_n \right) \left(\sum_n b_n \right).$$

Esercizio 7 Sia $a_n \geq 0$ per ogni n . Dire se è vero che $\sum_n (a_n)^2$ convergente $\Rightarrow \sum_n a_n$ convergente.

Esercizio 8 i. Dimostrare la disuguaglianza

$$|xy| \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

ii. Utilizzando **i.**, dimostrare che se le serie $\sum_n (a_n)^2$ e $\sum_n (b_n)^2$ sono convergenti, allora anche la serie $\sum_n a_n b_n$ è convergente.

Esercizio 9 Provare che se la serie a termini positivi $\sum_n a_n$ è convergente, allora lo è la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{n}.$$

Esercizio 10 Date $\{a_n\}$ una successione infinitesima e $\sum_n b_n$ una serie assolutamente convergente, provare che la serie $\sum_n a_n b_n$ è una serie convergente.

Esercizio 11 Trovare una successione non monotona a_n , con $a_n > 0$ per ogni n , tale che la serie $\sum_n a_n$ converga.

Esercizio 12 Sia $\{a_k\}$ una successione. Supponiamo che

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k = S \in \mathbb{R} \quad \text{e che} \quad \sum_{k=1}^{+\infty} |a_k| = +\infty.$$

Allora necessariamente si ha

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k^+ = +\infty \quad \text{e} \quad \sum_{k=1}^{+\infty} a_k^- = +\infty,$$

dove a_k^+ e a_k^- sono rispettivamente la **parte positiva** e la **parte negativa** di a_k , così definite: se $x \in \mathbb{R}$ allora $x^+ = \max\{x, 0\}$ e $x^- = \max\{-x, 0\}$. È facile vedere che $x = x^+ - x^-$ e $|x| = x^+ + x^-$.

Esercizio 13 Trovare due successioni a_n, b_n , con $a_n \geq 0, b_n \geq 0$ tali che

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty, \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n = +\infty, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \min\{a_n, b_n\} < +\infty.$$

Esercizio 14 Sia $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione.

1. Se $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è infinitesima, allora $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ converge; V F
2. Se $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ converge, allora $\{|a_n|^{n!}\}_{n \in \mathbb{N}}$ è infinitesima; V F
3. Se $\sum_{k=1}^{+\infty} |a_k|$ converge, allora esiste $0 < \alpha < 1$ tale che definitivamente $|a_n| \leq \alpha^n$; V F
4. Se $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ converge assolutamente, allora $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k^2$ converge assolutamente. V F

Esercizio 15 Sia $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione, e ricordiamo che $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} = +\infty$, $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ converge.

1. Se $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ converge, allora $\sum_{k=1}^{+\infty} a_{4k}$ converge; V F
2. Se $\sum_{k=1}^{+\infty} |a_k|$ converge, allora $\sum_{k=1}^{+\infty} a_{2k}$ converge; V F
3. Se $\sum_{k=1}^{+\infty} |a_{2k}|$ converge, allora $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ converge; V F
4. Se $\sum_{k=1}^{+\infty} a_{2k}$ e $\sum_{k=0}^{+\infty} a_{2k+1}$ convergono, allora $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ converge. V F

Esercizio 16 Sia $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione e sia $S_n := \sum_{k=1}^n a_k$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ l'elemento ennesimo della corrispondente successione delle somme parziali.

1. $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ converge se e solo se $S_{n+1} - S_n \rightarrow 0$ per $n \rightarrow +\infty$; V F
2. Se $\forall \varepsilon > 0 \exists m \in \mathbb{N} : |S_{n+h} - S_n| \leq \varepsilon$ per ogni $n \geq m, h \in \mathbb{N}$, allora $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ converge; V F
3. Se S_n è limitata superiormente, allora $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ converge assolutamente; V F
4. Se S_n è monotona decrescente e $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ converge, allora converge assolutamente. V F

Esercizio 17 Sia $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione positiva (ossia $a_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$).

1. Se esiste una sottosuccessione $\{a_{k_n}\}$ tale che $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_{k_n}^{\frac{1}{n}} = 2$, allora $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k = +\infty$; V F

2. Se esiste una sottosuccessione $\{a_{k_n}\}$ tale che $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{k_n+1}}{a_{k_n}} = 2$, allora $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k = +\infty$; V F

3. Se per ogni sottosuccessione $\{a_{k_n}\}$ si ha $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_{k_n}^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{2}$, allora $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ converge; V F

4. Se per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha $a_n^{\frac{1}{n}} < 1$, allora $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ converge. V F